Banque « Agro »
A et AE - 0298-

MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE A
Durée : 3h 30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Les candidats doivent traiter les deux problèmes qui sont totalement indépendants.

PROBLEME I

Le but de ce problème est l'étude de la suite u, indexée par $\mathbb{N}^*$ et définie par :
- son premier terme u_1 strictement positif.
- la relation, pour tout n naturel non nul :

$$(1) \quad u_{n+1} = u_n\left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

Partie A *Définition de la suite à l'aide d'une suite de fonctions.*
1. Prouver que si u admet une limite dans $\mathbb{R}$, elle est nécessairement égale à 0 ou 1.

2.a. Justifier l'existence d'une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
- Pour tout x réel positif : $f_1(x) = x$.
- Pour tout n entier naturel non nul et tout x réel positif :

$$f_{n+1}(x) = f_n(x)\left(f_n(x) + \frac{1}{n}\right)$$

2.b. Exprimer, pour n entier naturel non nul, u_n en fonction de f_n et de u_1.

3. Dans cette question n est un entier naturel non nul fixé. En raisonnant par récurrence, justifier les résultats suivants.
3.a. f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
3.b. $f_n(0) = 0$
3.c. $f_n(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3.d. Pour tout réel strictement positif m, il existe un unique réel x strictement positif, tel que : $f_n(x) = m$

Partie B *Etude d'un cas particulier.*
1. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul on peut définir deux réels uniques α_n et β_n par les conditions :

$$\begin{cases} f_n(\alpha_n) = 1 - \dfrac{1}{n} \\ f_n(\beta_n) = 1 \end{cases}$$

PROBLEME II

Dans ce problème, on notera $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n ($n \geq 1$) et à coefficients complexes. $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de C^n, I est la matrice unité et Id est l'endomorphisme identité sur C^n.

Rappels et résultat admis

On rappelle que si une matrice admet n valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, que les espaces propres sont de dimension 1 et que tout système constitué de n vecteurs propres associés aux n valeurs propres est une base de C^n.

Question préliminaire :

Montrer qu'une matrice carrée a les mêmes valeurs propres que sa transposée.

Partie A : *Une méthode d'inversion de matrice de passage de vecteurs propres.*

1. Dans cette question, M est une matrice dont le terme de la ligne i et de la colonne j est noté $m_{i,j}$. On désignera par D la matrice diagonale dont les termes de la diagonale sont notés $\lambda_1,..,\lambda_n$. Déterminer le terme de la ligne i et de la colonne j des matrices $M \times D$ et $D \times M$. Quel est l'effet sur la matrice M d'une multiplication à droite ou à gauche par D ?

2. On suppose désormais que A admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1,..,\lambda_n$. Soit P une matrice inversible. Montrer que l'égalité : $A \times P = P \times D$ équivaut au fait que, pour tout j, le j-ième vecteur colonne de P est un vecteur propre pour A associé à λ_j.

3. Dans toute la suite, on notera $P = (p_{i,j})$ une matrice dont, pour tout j, le j-ième vecteur colonne est un vecteur propre pour λ_j relativement à la matrice A. La matrice $Q = (q_{i,j})$ jouera le même rôle (avec les mêmes valeurs propres) pour la matrice ${}^tA$.

3.a. Justifier l'égalité : $${}^tQ \times A = D \times {}^tQ$$

3.b. En déduire : $$A \times ({}^tQ)^{-1} = ({}^tQ)^{-1} \times D$$

puis l'existence d'une matrice diagonale inversible Δ telle que l'on ait :

$$({}^tQ)^{-1} = P \times \Delta$$

Indication : On pourra interpréter les vecteurs colonnes de $({}^tQ)^{-1}$ en termes de vecteurs propres.

3.c. On note $\delta_1, ..., \delta_n$ les coefficients de la diagonale de Δ. Après avoir justifié la relation :

$$\Delta \times {}^tQ = P^{-1}$$

montrer qu'ils sont déterminés par la relation :

$$\delta_i \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}\, q_{k,i} = 1$$

4. Application : Montrer que si les valeurs propres de A sont toutes non nulles, alors A est inversible et que le terme de la i-ième ligne et j-ième colonne de A^{-1} vérifie :

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \times \frac{p_{i,k}\, q_{j,k}}{\lambda_k}$$

Partie B : *Application au calcul de l'inverse d'une matrice.*
Dans toute cette partie on considère l'élément de $\mathscr{E}$ défini par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.a. m désigne dans cette question un entier naturel vérifiant : $1 \leq m \leq n$. Justifier, pour tout k entier naturel la relation :

$$\sin\left(\frac{(k+1)m\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{(k-1)m\pi}{n+1}\right) = 2\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right) \times \sin\left(\frac{km\pi}{n+1}\right)$$

1.b. En déduire que le vecteur V_m dont la k-ième composante (pour $1 \leq k \leq n$) est égale à :

$$\sin\left(\frac{km\pi}{n+1}\right)$$

est un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ_m que l'on explicitera en fonction de m.
1.c. Montrer alors que A admet n valeurs propres distinctes non nulles.
2. On reprend désormais les notations de la partie A.
2.a. En utilisant ce qui précède, expliciter $p_{i,j}$ et $q_{i,j}$ pour i et j variant de 1 à n.
2.b. Dans cette question x est un élément de $]0, \pi[$. Justifier la relation :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} \times \cos(n+1)x$$

En déduire une expression en fonction de n et x de la somme :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin^2(kx)$$

2.c. En utilisant la formule trouvée dans la question 3.c. de la partie A, montrer que δ_i ne dépend pas de i et donner sa valeur en fonction de n.
3. En déduire le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A^{-1}.